Leçon 250 - Transformation de Fourier. Applications.

Cadre : Les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut les généraliser à $\mathbb{R}^d$.

1. Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$. —

1. Définition et premières propriétés. —

- Rappel: : $(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ est un espace de Banach.
- Def : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit $\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y)dy$.
- Ex : Pour $f = \chi_{[-a,a]}$, $\widehat{f}(x) = \frac{2sin(xa)}{\sqrt{2\pi}x}$
  Pour $f(x) = e^{-|x|}$, on a $\widehat{f}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)}$.
- Pro : $\widehat{f + \lambda.g} = \widehat{f} + \lambda\widehat{g}$
- Pro : $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$.
- Lemme de Riemann-Lebesgue : Quand $|x| \to +\infty$, $\widehat{f}(x) \to 0$. Donc $\widehat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$.
- Pro : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a\mathbb{R}$.
  a) Pour $g(x) = f(x)e^{iax}$, on a $\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x-a)$.
  b) Pour $g(x) = f(x-a)$, on a $\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x)e^{-iax}$.
  c) Pour $g(x) = \overline{f(-x)}$, on a $\widehat{g}(x) = \overline{\widehat{f}(x)}$.
  d)Pour $\lambda > 0$ et $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, on a $\widehat{g}(x) = \lambda\widehat{f}(\lambda x)$.
- Ex : Pour $f(x) = e^{-\frac{|x-a|}{\lambda}}$, on a $\widehat{f}(x) = \frac{2\lambda e^{-iax\lambda}}{\sqrt{2\pi}(1+(\lambda x)^2)}$.

2. Produit de convolution. —

- Def : Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables positives, on définit
  $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(x)\tau_{-x}(g)(-y)dy \in [0, +\infty]$.
- Pro : Si ces quantités sont finies, on a $f * g = g * f$, $f * (g * h) = ((f * g) * h)$, et $f*(g+\lambda h) = f*g+\lambda f*h$. La convolution de fonctions est commutative, associative, et bilinéaire.
- Inégalité de Young pour la convolution : Pour $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et $f \in L^p$, $g \in L^q$, on a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_p.\|g\|_q$.
- Ainsi, le produit de convolution est bien défini sur $L^1 \times L^1$.
- Ex : $f * \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)dt$.
- Pro : Ainsi, $L^1(\mathbb{R})$ muni de * est donc une $\mathbb{C}$-algèbre commutative.
- Thm : Pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $f * g(x) \to_{|x| \to +\infty} 0$.
- Thm : Pour $f \in L^1$ et $g \in C^1$ telle que g,g' sont bornées, alors $f * g$ est dérivable et $(f * g)' = f * (g')$.
- Rem : Le produit de convolution régularise une fonction f en faisant une moyenne pondérée par g des valeurs de f en chaque point.
- Ex : Pour tout $t > 0$, la fonction $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ permet de régulariser les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ par convolution.
- Pro : Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \times \widehat{g}.\sqrt{2\pi}$.
- App : L^1 ne possède pas d'unité pour la convolution.
- App : Si $f * f = f$ dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $f = 0$ pp.

3. Inversion de la transformée de Fourier. —

- Pro : Si f est de classe C^1 par morceaux et $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f'}(x) = (ix)\widehat{f}(x)$.
  Si f est de classe C^k par morceaux et $f, f', \ldots, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f^{(k)}}(x) = (ix)^k\widehat{f}(x)$.
- App : Si f est de classe C^2 avec $f, f', f" \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
- Rem : Plus f est dérivable avec des dérivées intégrables, plus $\widehat{f}$ décroît rapidement vers 0 en l'infini.
- Pro : Si $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est dérivable, de dérivée $\widehat{f}'(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}(-iy)f(y)dy$.
  Si $x^k \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est D^k, de dérivée k-ième $\widehat{f}^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}(-iy)^k f(y)dy$.
- Rem : Plus f décroît vers 0 rapidement en l'infini, plus $\widehat{f}$ est dérivable.
- Thm : Inversion de Fourier : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
  Alors pour $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{itx}dt$, on a $g \in C_0^0(\mathbb{R})$ et $g = f$ pp.
- Cor : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ pp.
- App : Injectivité de la transformée de Fourier : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $\widehat{f}(x) = 0$ pp, alors $f = 0$ pp.

2. Extension de la transformée de Fourier. —

1. Prolongement de la transformation de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$. —

- **Dev** : Théorème de Fourier-Plancherel : A chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut associer une fonction $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ telle que :
  1) Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f.
  2) $\forall f \in L^2$, on a $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.
  3) $f \in L^2 \mapsto \widehat{f} \in L^2$ est une isométrie linéaire bijective d'espaces de Hilbert.
- Rem : On a ainsi un prolongement de la transformée de Fourier de $L^1 \cap L^2$ qui est une isométrie linéaire bijective.
- Pro : Pour $f \in L^2$, en notant $\phi_A(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} e^{-ixt} f(x)dx$ et
  $\Psi_A(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} e^{-ixt} \widehat{f}(x)dx$, on trouve :
  $\lim_{A \to +\infty}(\|\phi_A - \widehat{f}\|_2) = 0$ et $\lim_{A \to +\infty}(\|\psi_A - f\|_2) = 0$
- Cor : Pour $f \in L^2$ tq $\widehat{f} \in L^1$, on a alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y)dy$ pp, donc la classe de f possède un représentant dans $C_0^0(\mathbb{R})$.
- Ex : $f(x) = sinc(\pi x) \in L^2(\mathbb{R}) - L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.

2. *Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R})$.* —

- Def : $S(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tq $\sup_x |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)| < +\infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$.

- Def : On munit $S(\mathbb{R})$ des semi-normes : $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_x |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)|, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$.
- Ex : $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ et $x \mapsto e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$.
- Rem : $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, donc la transformée de Fourier sur S est bien définie.
- Ex : Soit $G_\alpha(x) = e^{-x^2\alpha}$. Alors $\widehat{G_\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$.
  Ainsi, la transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne, qui est encore dans $S(\mathbb{R})$.
- Pro : 1) Les applications $f \mapsto x^\alpha f$ et $f \mapsto f^{(\beta)}$ sont continues sur $S(\mathbb{R})$.
  2) Si $f, g \in S(\mathbb{R})$, alors $f * g \in S(\mathbb{R})$ et $\widehat{f*g} = \widehat{f}.\widehat{g}$.
- Thm : Inversion de Fourier : La transformation de Fourier est une application linéaire bijective de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$.
  De plus, pour tout $f \in S(R)$, on a $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$.

3. *Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R})$.* —

- Def : On définit $S'(\mathbb{R})$ comme l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $S(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ pour les semi-normes $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_x |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)|$.
- Thm+Def : Si $T \in S'(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de T, notée $\widehat{T}$, par la forme linéaire sur $S(\mathbb{R})$:
  $< \widehat{T}, \varphi > := < T, \widehat{\varphi} >, \forall \pi \in S(\mathbb{R})$.
  On a de plus $\widehat{T} \in S'(\mathbb{R})$.
- Ex : $\widehat{\delta_0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. $\widehat{1} = \sqrt{2\pi}\delta_0$.
- Thm : La transformée de Fourier sur $S'(\mathbb{R})$ est bijective, bicontinue.

3. Applications en analyse. —

1. *Etude de signaux à spectre borné.* —

- Def : $I =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $BL^2(I) = \{f \in L^2(\mathbb{R})$ tq $\mathscr{F}(f).\chi_{\mathbb{R}-I} \equiv 0\}$.
- Pro : C'est un sous-ev fermé de $L^2(\mathbb{R})$.
- Pro : Si $u \in Bl^2(I)$, alors $u \in C_0^0(\mathbb{R})$ et $\|u\|_\infty \leq 1.\|u\|_2$.
- Pro : La famille des $(e_k(x) = sinc(\pi(x-k)))_{k\in\mathbb{Z}})$ est une base hilbertienne de $BL^2(I)$.
- **Dev** : Echantillonnage de Shannon : L'application $u \in BL^2(I) \mapsto (u(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ est bien définie et est une isométrie linéaire bijective entre ces deux espaces.
  De plus, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u(k)e_n$ converge vers u dans $L^2(\mathbb{R})$ et dans $C_0^0(\mathbb{R})$. Donc $u(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u(k) sinc(\pi(x-k)), \forall x \in \mathbb{R}$.

2. *Formule sommatoire de Poisson.* —

- Thm : Pour $f \in S(\mathbb{R})$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(.+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.
  De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_n f(x+n) = \sum_n \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx}$
  En particulier, $\sum_n f(n) = \sum_n \widehat{f}(n)$.
- App : Dans $S'(\mathbb{R})$, on a $\delta_\mathbb{Z} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k = \widehat{\delta_\mathbb{Z}}$.

3. *Polynômes orthogonaux.* —

- Def : On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que $\forall n \int_I |x|^n \rho(x) dq \leq +\infty$.
- Def : On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesue de Lebesgue. Muni de son produit scalaire $\int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$, c'est un espace de Hilbert contenant les fonctions polynômiales.
- Pro : Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux, vérifiant $\deg(P_n) = n$, que l'on appelle "famille des polynômes orthogonaux associée à ρ". On l'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_n$.
- Ex : Polynômes de Hermite, de Lagrange, de Chebychev.
- App : Polynômes de meilleure approximation.
- Thm : S'il existe $a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx \leq +\infty$, alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

4. *Fonction caractéristique d'une variable aléatoire.* —

- Def : Fonction caractéristique d'une v.a.
- Pro : La fonction caractéristique caractérise la loi de la v.a. par injectivité de la transformée de Fourier.
- Exemples de fonctions caractéristiques.
- Pro : Si X a un moment d'ordre k, alors Φ_X est de classe C^k.
  On a de plus $\Phi_X^{(k)}(t) = E[(iX)^k e^{iXt}]$.
- Thm : Réciproquement, Si Φ_X est de classe C^k, alors X a un moment d'ordre $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.
- **Dev** : Théorème de Lévy : X_n converge en loi vers X ssi Φ_{X_n} converge simplement vers Φ_X.
- App : Théorème Central de la Limite.

Références

Rudin : Transformation de Fourier. Th de Fourier-Plancherel.(Dev)
Briane,Pagès : Transformation de Fourier, produit de convolution, approximations de l'unité. Formule d'inversion de Fourier.
Zuily (Eléments de distributions et d'EDP) : Transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R})$, dans $S'(\mathbb{R})$.
Gourdon : Formule sommatoire de Poisson.
Willem : Echantillonnage de Shannon.
Zuily,Queffélec : Fonction caractéristique, Théorème de Lévy+TCL.(Dev)
Faraut : Transformation de Fourier, exemples. Th de Fourier-Plancherel.(Dev)
Objectif Agrégation : Produit de convolution, exemples.
Barbe,Ledoux/Ouvrard : Applications au TCL.

June 11, 2017
Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes